



PENERAPAN LAGRANGE MULTIPLIER UNTUK MENGOPTIMALKAN RUGI DAYA PADA RANGKAIAN LISTRIK

Ilham Arifin^{1)*}, Nur Olivia²⁾, Juan Prihanda³⁾, Olga Alicia⁴⁾, Laura Eli⁵⁾, Romi Syahputra⁶⁾

^{1,2,3,4,5,6} Departemen Matematika Universitas Sumatera Utara, 20772, Indonesia

INFORMASI ARTIKEL	A B S T R A K
Received: December 06, 25 Revised: March 04, 26 Available online: March 31, 26	Penelitian ini membahas penerapan metode Lagrange Multiplier untuk meminimalkan kerugian daya resistif dalam sirkuit listrik, khususnya pada sistem non-planar yang kompleks. Kerugian daya resistif merupakan salah satu penyebab utama penurunan efisiensi transmisi energi listrik. Upaya tradisional seperti meningkatkan luas penampang konduktor dianggap tidak efisien dari segi biaya dan ruang, sehingga diperlukan pendekatan matematis untuk menemukan kondisi optimal antara tegangan dan arus. Melalui penerapan Hukum Ohm dan analisis nodal, dibentuk sistem persamaan yang mewakili hubungan antara tegangan, arus, dan resistansi. Sistem tersebut kemudian diformulasikan menjadi fungsi Lagrange sebagai fungsi tujuan dan fungsi kendala. Proses optimasi dilakukan menggunakan bahasa pemrograman Python dengan Sympy/Numpy untuk perhitungan simbolik dan numerik. Hasil optimasi menunjukkan bahwa metode Lagrange Multiplier mampu menentukan nilai tegangan dan arus yang meminimalkan kerugian daya total sebesar 663.26 Watt. Kata kunci: Lagrange Multiplier, Kerugian Daya Resistif, Analisis Nodal, Hessian Terbatas, Sirkuit Non-Planar
CORRESPONDENCE	A B S T R A C T
E-mail: ilhamtheclever@gmail.com	This study discusses the application of the Lagrange Multiplier method to minimise resistive power losses in electrical circuits, particularly in complex non-planar systems. Resistive power losses are one of the main causes of reduced electrical energy transmission efficiency. Traditional efforts such as increasing the cross-sectional area of conductors are considered inefficient in terms of cost and space, so a mathematical approach is needed to find the optimal conditions between voltage and current. Through the application of Ohm's law and nodal analysis, a system of equations was formed that represents the relationship between voltage, current, and resistance. The system was then formulated into a Lagrangian function as an objective function and constraint function. The optimisation process was carried out using the Python programming language with the Sympy/Numpy for symbolic calculations and numerical calculations. The optimisation results showed that the Lagrange Multiplier method was able to determine the voltage and current values that minimised the total power loss by 663.26 Watts. Keywords: Lagrange Multiplier, Resistive Power Loss, Nodal Analysis, Bordered Hessian, Non-Planar Circuit

I. LATAR BELAKANG

Arus bolak-balik (AC) awalnya lebih banyak digunakan dibanding arus searah (DC) karena AC kompatibel dengan transformator, sehingga mudah ditransmisikan jarak jauh. Sebaliknya, DC tidak dapat dikirim jarak jauh hingga ditemukannya mercury arc valves pada 1950-an. Namun, teknologi tersebut membuat sistem HVDC menjadi lebih mahal dibanding HVAC. Meskipun demikian, HVDC lebih efisien karena memiliki kerugian transmisi lebih kecil, dan menjadi lebih unggul terutama untuk jarak lebih dari sekitar 600 km.

Perbandingan dari EE Power menunjukkan bahwa kerugian energi pada HVAC sekitar 5-10%, sedangkan HVDC hanya 2-3%. Hal ini terjadi karena HVAC mengalami tiga jenis kerugian daya resistif, kapasitif, dan

induktif, sedangkan HVDC hanya mengalami kerugian resistif. Artikel ini berfokus pada pembahasan kerugian daya resistif pada rangkaian AC maupun DC [1].

Kerugian daya pada kabel listrik dipengaruhi panjang kabel, tegangan, arus, dan kualitas konduktor. Tegangan tinggi mengurangi kerugian karena menurunkan besar arus. Memperbesar luas penampang kabel dapat mengurangi resistansi, tetapi tidak efisien secara biaya maupun ruang. Alternatif yang lebih efektif adalah melakukan optimasi pada tegangan dan arus melalui metode optimasi klasik.

Penelitian ini menerapkan metode Lagrange Multiplier untuk meminimalkan kerugian daya resistif pada rangkaian listrik non-planar, seperti rangkaian terpadu tiga dimensi (3D IC) [6]. Rangkaian jenis ini memiliki keunggulan seperti konsumsi daya rendah, kinerja lebih tinggi, dan kepadatan lebih besar. Pemodelan matematis rangkaian

dilakukan menggunakan hukum daya dan hukum Ohm [8], [10]. Kemudian diselesaikan dengan Lagrange Multiplier dan dianalisis lebih lanjut menggunakan Bordered Hessian untuk menentukan sifat solusi [7], [12]. Proses perhitungan didukung oleh pemrograman Python agar lebih akurat dan efisien.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini merumuskan beberapa pertanyaan utama. Bagaimana menentukan nilai tegangan optimal pada setiap node rangkaian listrik serta meminimalkan rugi daya menggunakan metode Lagrange Multiplier. Kemudian membandingkan hasil metode Lagrange Multiplier dengan hasil pengerjaan Aljabar Linear menggunakan Matriks. [16], [17]. Penelitian ini bertujuan untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut sekaligus mengembangkan model matematis dan implementasi komputasi yang mampu meminimalkan rugi daya resistif secara optimal. Selain manfaat teoretis dalam penguatan konsep optimasi pada sistem kelistrikan, hasil penelitian juga memberikan manfaat praktis berupa alternatif pengurangan rugi daya tanpa memperbesar konduktor, serta manfaat komputasional melalui penggunaan Python yang mempercepat dan meningkatkan akurasi proses optimasi pada sistem listrik kompleks.

II. LANDASAN TEORI

A. Konsep Optimasi dalam Sistem Teknik

Optimasi merupakan proses untuk menentukan kondisi terbaik dari suatu sistem berdasarkan kriteria tertentu, seperti meminimalkan kerugian atau memaksimalkan efisiensi. Dalam konteks teknik elektro, optimasi sering digunakan untuk meningkatkan efisiensi sistem tenaga listrik, mengurangi rugi daya, atau menyeimbangkan beban dalam jaringan. Menurut Rao (2019), optimasi teknik melibatkan formulasi fungsi tujuan (*objective function*) dan serangkaian kendala (*constraints*) yang harus dipenuhi oleh sistem. Fungsi tujuan biasanya dinyatakan dalam bentuk matematis yang menggambarkan variabel-variabel sistem seperti tegangan, arus, atau resistansi.

Masalah optimasi dapat diklasifikasikan menjadi dua jenis, yaitu optimasi tanpa kendala dan optimasi dengan kendala. Pada sistem kelistrikan, kendala sering kali muncul dari hukum fisika seperti Hukum Kirchhoff dan Hukum Ohm yang harus dipenuhi untuk menjaga keseimbangan energi dan arus pada setiap simpul rangkaian. Oleh karena itu, metode optimasi yang digunakan harus mampu mempertimbangkan keberadaan kendala-kendala tersebut.

B. Metode Lagrange Multiplier

Metode Lagrange Multiplier adalah metode optimasi klasik yang digunakan untuk menentukan nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi dengan memperhitungkan satu atau lebih fungsi kendala. Konsep ini diperkenalkan oleh Joseph-Louis Lagrange pada abad ke-18 dan menjadi dasar dalam teori optimasi modern.

Menurut Luenberger dan Ye (2016), metode ini bekerja dengan membentuk fungsi baru yang disebut fungsi Lagrangian, yaitu fungsi yang menggabungkan fungsi tujuan (*objective function*) dan fungsi kendala (*constraint*

function) melalui variabel tambahan yang disebut pengali Lagrange (λ).

Secara matematis, fungsi Lagrangian ditulis sebagai:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x) \quad (1)$$

dengan:

- $f(x)$: fungsi tujuan yang akan dioptimalkan,
- $g(x) = 0$: fungsi kendala,
- λ : pengali Lagrange.

Kondisi optimum tercapai ketika turunan parsial dari fungsi Lagrangian terhadap setiap variabel sama dengan nol:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (2)$$

Pada sistem dengan lebih dari satu kendala, fungsi Lagrangian menjadi:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \quad (3)$$

Dalam konteks rangkaian listrik non-planar, fungsi $f(x)$ dapat merepresentasikan rugi daya total (P), sedangkan $g(x)$ menggambarkan hubungan antara tegangan dan arus sesuai hukum Kirchhoff dan Ohm. Dengan menerapkan metode ini, diperoleh nilai tegangan (V) dan arus (I) yang memberikan rugi daya minimum.

Keunggulan metode ini adalah kemampuannya memberikan solusi analitis yang memenuhi kondisi fisik sistem, serta dapat dengan mudah diterapkan dalam perhitungan simbolik menggunakan perangkat lunak seperti Python (SymPy). Pendekatan ini menghemat waktu, mengurangi kesalahan perhitungan manual, dan menghasilkan hasil yang konsisten.

C. Hukum Daya dan Hukum Ohm

Dua hukum dasar yang menjadi landasan perhitungan rugi daya dalam sistem kelistrikan adalah Hukum Ohm dan Hukum Daya. Kedua hukum ini digunakan untuk memodelkan hubungan antara tegangan, arus, dan resistansi yang menjadi dasar pembentukan fungsi matematis dalam penelitian ini.

Hukum Ohm, yang diperkenalkan oleh Georg Simon Ohm pada tahun 1827, menyatakan bahwa besar tegangan V yang jatuh pada suatu elemen penghantar berbanding lurus dengan kuat arus I yang mengalir melaluinya, dengan konstanta proporsionalitas berupa resistansi R . Secara matematis dapat ditulis sebagai:

$$V = I \times R \quad (4)$$

Hukum ini menggambarkan hubungan linear antara arus dan tegangan dalam material konduktor ideal. Akan tetapi, dalam sistem nyata, nilai resistansi suatu konduktor dapat dipengaruhi oleh beberapa faktor, seperti panjang kabel, luas penampang, jenis bahan konduktor, serta suhu operasi. Hubungan antara resistansi dan karakteristik fisik suatu konduktor dapat dinyatakan dengan rumus:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (5)$$

Dengan ρ (resistivitas bahan), L (panjang konduktor), dan A (luas penampang). Dari persamaan tersebut dapat disimpulkan bahwa semakin besar luas penampang konduktor, maka resistansinya semakin kecil, sehingga rugi daya dapat dikurangi. Namun, cara ini tidak selalu efisien karena membutuhkan biaya material yang tinggi dan ruang

yang lebih besar. Oleh karena itu, penelitian ini berfokus pada upaya mengoptimalkan nilai arus dan tegangan melalui pendekatan matematis tanpa harus mengubah karakteristik fisik konduktor.

Hukum Daya menjelaskan hubungan antara arus, tegangan, dan energi listrik yang dikonsumsi atau hilang oleh suatu elemen rangkaian. Secara umum dinyatakan sebagai:

$$P = V \times I \quad (6)$$

Jika Hukum Ohm disubstitusikan ke dalam persamaan daya, maka dapat diperoleh dua bentuk ekuivalen:

$$P = I^2 \times R = \frac{V^2}{R} \quad (7)$$

Kedua bentuk tersebut menunjukkan bahwa rugi daya resistif (resistive loss) sebanding dengan kuadrat arus yang mengalir atau dengan besar resistansi konduktor. Artinya, kenaikan kecil pada arus akan menyebabkan peningkatan rugi daya yang jauh lebih besar. Oleh karena itu, pengendalian arus dan resistansi merupakan faktor penting dalam meningkatkan efisiensi sistem tenaga listrik.

Dalam sistem transmisi jarak jauh, rugi daya resistif ini menjadi signifikan karena sebagian energi listrik diubah menjadi panas sesuai dengan hukum Joule. Hal tersebut dapat menyebabkan kehilangan energi sebesar 5–10% dari total daya yang ditransmisikan, tergantung pada panjang saluran dan kualitas konduktor. Upaya untuk mengurangi rugi daya dapat dilakukan dengan menaikkan tegangan transmisi agar arus yang mengalir lebih kecil, atau dengan melakukan optimasi matematis terhadap kondisi arus dan tegangan agar tercapai titik operasi dengan rugi daya minimum.

D. Analisis Supernodal dan Rangkaian Non-Planar

Rangkaian listrik non-planar adalah jenis rangkaian yang tidak dapat digambar dalam bidang dua dimensi tanpa saling berpotongan antara elemen konduktor. Jenis rangkaian ini banyak digunakan dalam perancangan *integrated circuit* (IC) tiga dimensi modern karena memiliki keunggulan berupa efisiensi ruang dan peningkatan kecepatan sinyal.

Untuk menganalisis rangkaian kompleks semacam ini, digunakan metode analisis supernodal, yaitu perluasan dari analisis nodal yang memungkinkan perhitungan tegangan antar simpul yang dihubungkan oleh sumber tegangan ideal. Analisis supernodal membantu menyusun persamaan simultan antara arus dan tegangan dalam sistem, yang kemudian dapat diformulasikan ke dalam bentuk fungsi Lagrangian. Dengan demikian, metode ini sangat relevan digunakan dalam penelitian yang bertujuan meminimalkan rugi daya melalui pendekatan matematis.

E. Implementasi Komputasional dengan Python

Perhitungan matematis pada sistem optimasi yang kompleks sering kali tidak dapat diselesaikan secara manual karena melibatkan banyak variabel dan persamaan nonlinier. Oleh sebab itu, penggunaan perangkat komputasi menjadi penting.

Python merupakan salah satu bahasa pemrograman yang banyak digunakan dalam komputasi ilmiah karena memiliki pustaka matematika yang lengkap seperti NumPy, SymPy, dan Matplotlib. NumPy digunakan untuk operasi

numerik dan manipulasi matriks, SymPy untuk aljabar simbolik dan turunan parsial, sedangkan Matplotlib berfungsi untuk visualisasi grafik hasil perhitungan.

F. Bordered Hessian untuk mencari nilai ekstrem (maksimum/minimum)

Bordered hessian merupakan metode untuk mencari nilai ekstrem (maksimum/minimum) ketika terdapat sistem kendala, ciri-ciri dari bordered hessian adalah berbentuk sebuah matriks, yang di dalamnya terdapat matriks Hessian, matriks 0, dan beberapa matriks kendala, diformulasikan sebagai berikut

$$|H_{Bordered}| = \begin{bmatrix} 0 & g_{1x_1} & \dots & g_{1x_n} \\ g_{1x_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & g_{mx_n} \\ g_{1x_n} & \dots & g_{mx_n} & H \end{bmatrix}$$

Formulasi tersebut merupakan Bordered Hessian, dengan banyaknya entri 0 seimbang dengan jumlah kendala sehingga entri 0 membentuk matriks persegi dan menjadi matriks minor di pojok kiri atas, sedangkan dipojok bawah kanan adalah matriks Hessian.

G. Penerapan Lagrange Multiplier berdasarkan penelitian sebelumnya

Metode Lagrange Multiplier digunakan pada penelitian sebelumnya untuk menentukan nilai optimum dari suatu fungsi yang terdapat kendala. Menurut Vadlamani, Xiao, dan Yablonovitch (2020) dalam artikel *Physics successfully implements Lagrange multiplier optimization*. Dalam penelitian mereka menunjukkan bahwa fenomena fisika seperti rangkaian listrik resistif, osilator optik, dan laser secara alamiah berusaha mencapai kondisi minimum daya hilang (minimum power dissipation), yang secara matematis identik dengan proses optimasi fungsi daya dengan kendala tertentu.

Konsep ini sejalan dengan prinsip minimisasi energi dalam fisika, di mana setiap sistem cenderung bergerak menuju keadaan dengan energi atau daya yang minimum. Pada konteks rangkaian listrik resistif, rugi daya (loss) diberikan oleh hubungan:

$$P = \frac{(v_1 - v_2)^2}{R} \quad (8)$$

Dengan demikian fungsi tujuan dapat dibentuk melalui rugi daya total dari suatu jaringan resistif, sedangkan fungsi kendala terbentuk dari KCL. Penerapan Lagrange multiplier, kendala arus dan tegangan dapat dimasukkan secara langsung ke dalam fungsi tujuan, menghasilkan kondisi optimal yang menggambarkan distribusi tegangan dan arus dengan rugi daya minimum.

III. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif dengan pendekatan matematis dan komputasional yang bertujuan untuk meminimalkan rugi daya resistif pada rangkaian listrik dengan menerapkan metode *Lagrange Multiplier*. Pendekatan matematis digunakan untuk memformulasikan hubungan antara tegangan, arus, dan resistansi berdasarkan hukum Ohm serta hukum Kirchhoff, sedangkan pendekatan

komputasional digunakan untuk memperoleh solusi numerik dengan bantuan bahasa pemrograman Python.

Penelitian dilaksanakan secara simulatif menggunakan perangkat lunak Python 3.12 dengan dukungan pustaka *NumPy* dan *SymPy* sebagai alat bantu perhitungan matematis serta *Matplotlib* untuk visualisasi grafik. Penelitian ini dilakukan di lingkungan komputasi lokal menggunakan laptop dengan spesifikasi minimal prosesor Intel Core i3 dan RAM 8 GB, pada bulan Oktober hingga November 2025.

Langkah awal penelitian dimulai dengan melakukan analisis teoretis terhadap sistem kelistrikan non-planar yang memiliki elemen resistif. Berdasarkan hukum daya listrik, besar rugi daya resistif dapat dinyatakan sebagai fungsi kuadrat dari arus, yaitu:

$$P = \sum I_i^2 R_i \quad (9)$$

Selanjutnya, fungsi kendala diperoleh dari penerapan hukum Ohm dan analisis nodal terhadap tegangan dan arus pada setiap node atau supernode dalam rangkaian. Dari kedua persamaan tersebut dibentuklah fungsi Lagrangian yang menggabungkan fungsi tujuan dan fungsi kendala dalam satu sistem, yaitu

$$L(V, I, \lambda) = \sum I_i^2 R_i + \lambda f(V, I) \quad (10)$$

Fungsi Lagrangian tersebut kemudian diturunkan secara parsial terhadap setiap variabel V_i , I_i , dan λ untuk menghasilkan sistem persamaan baru yang dapat diselesaikan secara simultan.

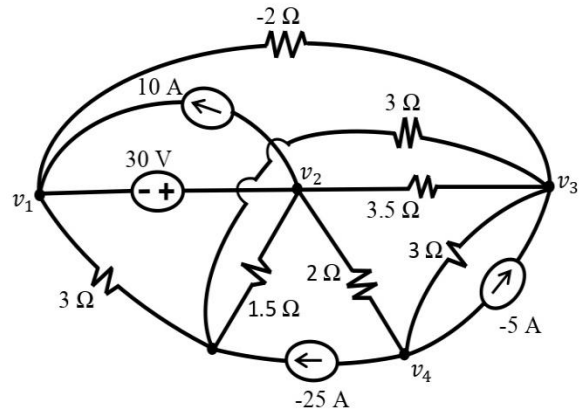
Tahapan selanjutnya adalah penyelesaian matematis menggunakan metode aljabar simbolik pada *SymPy* untuk memperoleh nilai optimal tegangan dan arus yang menghasilkan rugi daya minimum. Hasil optimasi ini kemudian disimulasikan secara komputasional. Visualisasi hasil dilakukan dalam bentuk grafik hubungan antara tegangan, arus, dan rugi daya agar dapat menunjukkan secara jelas kondisi optimal sistem yang dihasilkan oleh metode Lagrange.

Perbandingan hasil optimasi dengan kondisi konvensional, seperti penambahan luas penampang kabel, digunakan untuk mengevaluasi efektivitas metode Lagrange dalam meningkatkan efisiensi sistem kelistrikan. Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya membuktikan penerapan metode Lagrange Multiplier secara teoretis, tetapi juga menguji validitas dan efektivitasnya secara komputasional melalui simulasi numerik.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

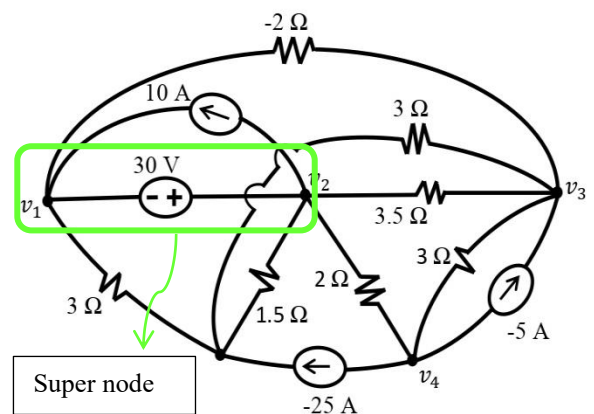
A. Deskripsi Penelitian

Data yang digunakan adalah data yang disusun secara mandiri melalui buku “Rangkaian Listrik, Edisi Keenam, Jilid 1” dengan nama penulis “William H. Hayt, Jr.”, “Jack E. Kemmerly”, “Steven M. Durbin”, Berikut akan ditunjukkan data dari rangkaian listrik yang telah dibuat.



Gambar 1. Rangkaian Listrik Non-Planar

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai tegangan optimal pada setiap node rangkaian listrik serta meminimalkan rugi daya menggunakan metode Lagrange Multiplier. Kemudian membandingkan hasil metode Lagrange Multiplier dengan hasil pengerjaan Aljabar Linear menggunakan Matriks. Tujuannya agar hasil metode Lagrange Multiplier dapat divalidasi, benar dan konsisten, serta menunjukkan keunggulan metode Lagrange Multiplier.



Gambar 2. Rangkaian Listrik Menunjukkan Super Node

Berdasarkan analisis terhadap rangkaian listrik di atas terdapat 5 node, 4 node non referensi dan 1 node referensi, serta sumber tegangan yang menghubungkan antara node v_1 dengan v_2 (Super Node).

B. Pembentukan Sistem Kendala

Langkah awal adalah mencari sistem kendala, sistem kendala ini membatasi ruang gerak solusi tegangan optimal, karena kendala-kendala seperti resistansi mempengaruhi besaran arus listrik dan jumlah tegangan []. Di sini kami menggunakan analisis nodal dan super node untuk mendapatkan sistem kendala.

- Analisis nodal dan super node pada node v_1 dan v_2

$$0 = -\frac{v_1 - v_3}{2} + \frac{v_2 - v_3}{3.5} + \frac{v_2 - v_4}{2} + \frac{v_2}{1.5} + \frac{v_1}{3} \quad (11)$$

$$30 = v_2 - v_1 \quad (12)$$

- Analisis nodal pada node v_3

$$-5 = \frac{v_3 - v_1}{2} + \frac{v_3 - v_2}{3.5} + \frac{v_3 - v_4}{3} + \frac{v_3}{3} \quad (13)$$

- Analisis nodal pada node v_4

$$25 + 5 = \frac{v_4 - v_2}{2} + \frac{v_4 - v_3}{3} \quad (14)$$

Dari analisis nodal dan super node yang telah diterapkan menghasilkan 4 sistem kendala, sistem-sistem tersebut dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$g_1(v_1, v_2, v_3, v_4) = 61v_2 + 9v_3 - 7v_1 - 21v_4 \quad (15)$$

$$g_2(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_2 - v_1 - 30 \quad (16)$$

$$g_3(v_1, v_2, v_3, v_4) = 63v_1 - 36v_2 + 57v_3 - 42v_4 + 630 \quad (17)$$

$$g_4(v_1, v_2, v_3, v_4) = 5v_4 - 3v_2 - 2v_3 - 180 \quad (18)$$

C. Pembentukan Sistem Tujuan

Setelah mendapatkan sistem kendala, Langkah selanjutnya mencari sistem tujuan, karena tujuan kami adalah meminimumkan kerugian daya yang disebabkan oleh resistansi, maka sistem tujuan tercipta dari jumlah resistansi-resistansi. Terdapat 7 resistansi pada rangkaian listrik di atas, disajikan dalam tabel berikut:

TABEL I. TABEL RESISTANSI

Resistansi	Di antara dua node
Ke-1	v_1 dan v_3
Ke-2	v_1 dan node referensi
Ke-3	v_2 dan v_3
Ke-4	v_2 dan v_4
Ke-5	v_2 dan node referensi
Ke-6	v_4 dan v_3
Ke-7	v_3 dan node referensi

Rugi-rugi daya dapat dicari menggunakan formulasi berikut:

$$f(v_1, v_2, v_3, v_4) = -\frac{(v_1 - v_3)^2}{2} + \frac{v_1^2}{3} + \frac{2(v_2 - v_3)^2}{7} + \frac{v_3^2}{3} + \frac{(v_2 - v_4)^2}{2} + \frac{2v_2^2}{3} + \frac{(v_4 - v_3)^2}{3} \quad (14)$$

D. Penerapan Metode Lagrange Multiplier

Setelah sistem kendala dan sistem tujuan didapatkan, gunakan Lagrange Multiplier untuk mencari solusi optimalnya.

$$L(v_1, v_2, v_3, v_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = f(v_1, v_2, v_3, v_4) + \lambda_1 g_1(v_1, v_2, v_3, v_4) + \lambda_2 g_2(v_1, v_2, v_3, v_4) + \lambda_3 g_3(v_1, v_2, v_3, v_4) + \lambda_4 g_4(v_1, v_2, v_3, v_4) \quad (15)$$

Kemudian Lagrange diturunkan secara parsial terhadap semua variabel, sehingga menghasilkan sistem yang optimal.

$$\frac{\partial L}{\partial v_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial v_2} = 0, \frac{\partial L}{\partial v_3} = 0, \frac{\partial L}{\partial v_4} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = 0$$

$$\nabla_{v_1, v_2, v_3, v_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} L(v_1, v_2, v_3, v_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 0 \quad (16)$$

E. Implementasi Python

Pada bagian selanjutnya digunakan python untuk membantu menyelesaikan turunan parsial dan mencari solusi optimalnya.

TABEL II. TABEL KODE TURUNAN DAN SOLUSI

```
import sympy as sp

v1, v2, v3, v4, l1, l2, l3, l4 = sp.symbols("v1 v2 v3 v4 l1 l2 l3 l4")
y = ((-(v1-v3)**2)/2) + ((v1**2)/3) + (((2*((v2-v3)**2))/7) + (((v2-v4)**2)/2) + ((2*(v2**2)/3)) + (((v4-v3)**2)/3) + ((v3**2)/3))

g1 = (((-(v1-v3))/2) + ((v2-v3)/3.5) + ((v2-v4)/2) + (v2/1.5) + (v1/3))
g2 = v2-v1 - 30
g3 = (((-(v3-v1))/2) + (((v3-v2)/3.5) + ((v3-v4)/3) + (v3/3) + 5
g4 = ((v4-v2)/2) + ((v4-v3)/3) - 30

L = y + l1*(g1) + l2*(g2) + l3*(g3) + l4*(g4)

trn_v1 = sp.diff(L,v1)
trn_v2 = sp.diff(L,v2)
trn_v3 = sp.diff(L,v3)
trn_v4 = sp.diff(L,v4)
trn_l1 = sp.diff(L,l1)
trn_l2 = sp.diff(L,l2)
trn_l3 = sp.diff(L,l3)
trn_l4 = sp.diff(L,l4)
print(' ')
print('TURUNAN PARSIAL')
print(' ')
sp.pprint(f'turunan dL/dv1 : {trn_v1}')
sp.pprint(f'turunan dL/dv2 : {trn_v2}')
sp.pprint(f'turunan dL/dv3 : {trn_v3}')
sp.pprint(f'turunan dL/dv4 : {trn_v4}')
sp.pprint(f'turunan dL/dl1 : {trn_l1}')
sp.pprint(f'turunan dL/dl2 : {trn_l2}')
sp.pprint(f'turunan dL/dl3 : {trn_l3}')
sp.pprint(f'turunan dL/dl4 : {trn_l4}')
print(' ')
print('SOLUSI OPTIMAL')
print(' ')
eq1 = trn_v1
eq2 = trn_v2
eq3 = trn_v3
eq4 = trn_v4
eq5 = trn_l1
eq6 = trn_l2
eq7 = trn_l3
eq8 = trn_l4
solusi = sp.solve([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8])
sp.pprint(solusi)
```

```
TURUNAN PARSIAL
turunan dL/dv1 : -11/6 - 12 + 0.5*l3 - v1/3 + v3
turunan dL/dv2 : 1.45238895238895*l1 + 12 - 0.285714285714286*l3 - 14/2 + 61*v2/21 - 4*v3/7 - v4
turunan dL/dv3 : 0.214285714285714*l1 + 0.452388952388952*l3 - 14/3 + v1 - 4*v2/7 + 19*v3/21 - 2*v4/3
turunan dL/dv4 : -11/2 - 0.333333333333333*l3 + 514/6 - v2 - 2*v3/3 + 5*v4/3
turunan dL/dl1 : -v1/6 + 1.45238895238895*v2 + 0.214285714285714*v3 - v4/2
turunan dL/dl2 : -v1 + v2 - 30
turunan dL/dl3 : 0.5*v1 - 0.285714285714286*v2 + 0.452388952388952*v3 - 0.333333333333333*v4 + 5.0
turunan dL/dl4 : -v2/2 - v3/3 + 5*v4/6 - 30

SOLUSI UMUM
(l1: -35.9090909090909, l2: 59.1919191919192, l3: -42.2727272727273, l4: -110.454545454545, v1: -17.8030303030303, v2: 12.1969 + 696969697, v3: 68.4090909090909, v4: 70.6818181818182)
PS C:\Users\LEMONO>
```

Gambar 3. Hasil Turunan dan Solusi Optimalnya

TABEL III. TABEL HASIL TURUNAN DAN SOLUSI

Variabel	Turunan Parsial	Solusi Optimal
----------	-----------------	----------------

$$|H_{Bordered}| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1v_1} & g_{1v_2} & g_{1v_3} & g_{1v_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{2v_1} & g_{2v_2} & g_{2v_3} & g_{2v_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{3v_1} & g_{3v_2} & g_{3v_3} & g_{3v_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{4v_1} & g_{4v_2} & g_{4v_3} & g_{4v_4} \\ g_{1v_1} & g_{2v_1} & g_{3v_1} & g_{4v_1} & f_{v_1v_1} & f_{v_1v_2} & f_{v_1v_3} & f_{v_1v_4} \\ g_{1v_2} & g_{2v_2} & g_{3v_2} & g_{4v_2} & f_{v_2v_1} & f_{v_2v_2} & f_{v_2v_3} & f_{v_2v_4} \\ g_{1v_3} & g_{2v_3} & g_{3v_3} & g_{4v_3} & f_{v_3v_1} & f_{v_3v_2} & f_{v_3v_3} & f_{v_3v_4} \\ g_{1v_4} & g_{2v_4} & g_{3v_4} & g_{4v_4} & f_{v_4v_1} & f_{v_4v_2} & f_{v_4v_3} & f_{v_4v_4} \end{bmatrix}$$

TABEL V. TABEL KODE DETERMINAN

Setelah mendapatkan solusi optimal dari v_1 , v_2 , v_3 , dan v_4 , maka selanjutnya dapat ditentukan total kerugian daya dari rangkaian listrik tersebut melalui bantuan python.

```

matrik          =      sp.Matrix([[0,0,0,0,-7],[0,0,0,0,-1],
[0,0,0,0,63],[0,0,0,0,0],[-7,-1,63,0,-14]])
matrik2         =      sp.Matrix([[0,0,0,0,-7,61],[0,0,0,0,-1,1],[0,0,0,0,63,-36],
[0,0,0,0,0,-3],[-7,-1,63,0,-14,0],[61,1,-36,-3,0,122]])
matrik3          =      sp.Matrix([[0,0,0,0,-7,61,9],[0,0,0,0,-1,1,0],[0,0,0,0,63,-36,57],
[0,0,0,0,0,-3,-2],[-7,-1,63,0,-14,0,42],[61,1,-36,-3,0,122,-24],[9,0,57,-2,42,-24,38]])
matrik4           =      sp.Matrix([[0,0,0,0,-7,61,9,-21],[0,0,0,0,-1,1,0,0],[0,0,0,0,63,-36,57,-42],
[0,0,0,0,0,-3,-2,5],[-7,-1,63,0,-14,0,42,0],[61,1,-36,-3,0,122,-24,42],[9,0,57,-2,42,-24,38,-28],[-21,0,-42,5,0,-42,-28,70]])

```

Dari Bordered Hessian di atas didapat leading principle minors dengan nilai tiap determinan minors utamanya adalah $D_5 > 0$, $D_6 > 0$, $D_7 > 0$, $D_8 > 0$. Artinya solusi tersebut adalah solusi yang meminimalkan kerugian daya.

TABEL IV. TABEL KODE DAN HASIL RUGI TOTAL

```
R_total = y.subs(solusi)
sp.pprint(R_total)
#OutPutnya
R_total = 663.257575757575 Watt
```

Total kerugian daya didapat 663.26 Watt. Selanjutnya gunakan Bordered Hessian untuk melihat solusi v_1, v_2, v_3 , dan v_4 , apakah solusi maksimum atau minimum, kembali menggunakan python untuk mencari entri pada matriks Bordered Hessian.

G. Uji Sifat Ekstrem

Uji sifat ekstrem (maksimum atau minimum) dari solusi optimal dapat dilakukan dengan menggunakan Bordered Hessian di dalam python, karena $f(v_1, v_2, v_3, v_4)$ di dalam python diubah menjadi $\mathbf{y}$, maka $\mathbf{y}$ merupakan total rugi daya. Uji ini bertujuan untuk mengetahui apakah model Lagrange Multiplier meminimalkan kerugian atau memaksimalkan kerugian.

H. Menyajikan Grafik 3D

Kemudian grafik 3D dapat divisualisasikan dengan menggunakan model Lagrange Multiplier, dimana domain yang digunakan adalah solusi optimalnya. Grafik 3D dari Lagrange Multiplier berfungsi memvisualisasi hubungan antara fungsi tujuan dengan kendala sehingga titik optimum dapat dipahami secara lebih jelas sebagai titik singgung antara keduanya.

TABEL VI. TABEL KODE VISUALISASI

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def rugi_total(v1, v2, v3, v4):
    return (((v1-v3)**2)/2) + ((v1**2)/3) + ((2*((v2-
v3)**2))/7) + (((v2-v4)**2)/2) + ((2*(v2**2)/3))
+ (((v4-v3)**2)/3) + ((v3**2)/3)

#Titik optimal

V1 = np.linspace(-100, 100, 100)
V2 = np.linspace(-100, 100, 100)
V3 = 68.4090
V4 = 70.6818

V1_1, V2_2 = np.meshgrid(V1, V2)

Function = rugi_total(V1_1, V2_2, V3, V4)
```



```

nilai_min = np.min(Function)
nilai_max = np.max(Function)
index_min = np.unravel_index(np.argmin(Function),
Function.shape)
index_max = np.unravel_index(np.argmax(Function),
Function.shape)
V1_min = V1_1[index_min]
V1_max = V1_1[index_max]
V2_min = V2_2[index_min]
V2_max = V2_2[index_max]

Fig = plt.figure(figsize=(10,9))
Ak = Fig.add_subplot(111, projection='3d')

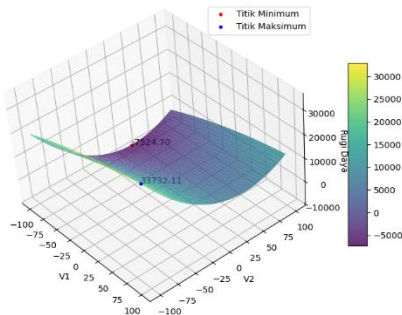
Surf = Ak.plot_surface(V1_1, V2_2, Function, cmap='viridis',
alpha=0.8)
Ak.scatter(V1_min, V2_min, nilai_min, f'{nilai_min:.2f}',
color='red', s=10, label='Titik Minimum')
Ak.scatter(V1_max, V2_max, nilai_max, f'{nilai_max:.2f}',
color='blue', s=10, label='Titik Maksimum')
Ak.text(V1_min, V2_min, nilai_min, f'{nilai_min:.2f}',
color='black')
Ak.text(V1_max, V2_max, nilai_max, f'{nilai_max:.2f}',
color='black')

Ak.set_xlabel('V1')
Ak.set_ylabel('V2')
Ak.set_zlabel('Rugi Daya')

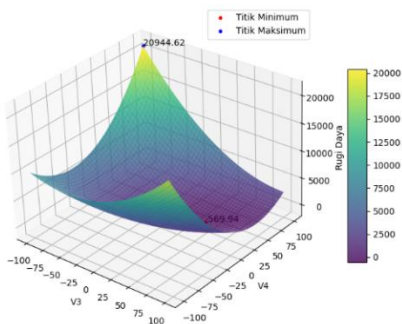
Fig.colorbar(Surf, shrink=0.6, aspect=10)
Ak.legend()

plt.show()

```



Gambar 4. Grafik 3 Dimensi V1 dan V2



Gambar 5. Grafik 3 Dimensi V3 dan V4

Grafik di atas didapat dari fungsi objektif, gambar 4 menjelaskan grafik 3 dimensi dengan v_1, v_2 merupakan nilai interval, sementara v_3, v_4 merupakan nilai solusi tetap, sama dengan gambar 5, v_3, v_4 menjadi nilai interval,

sementara v_1, v_2 merupakan nilai solusi tetap. Grafik di atas berguna untuk lebih memahami seberapa besar/kecil rugi daya yang dialami rangkaian listrik.

I. Penerapan Aljabar Linear

Aljabar Linear berperan penting dalam analisis kelistrikan, karena model matematis yang diciptakan oleh rangkaian listrik ini akan membentuk fungsi linear. Teknik yang paling umum digunakan untuk menyelesaikan model linear adalah menggunakan matriks. Matriks dapat membantu menyelesaikan model linear baik dalam banyak persamaan serta dimensi yang tinggi maupun persamaan yang sedikit serta dimensi yang rendah, namun ketika persamaannya banyak dan dimensinya tinggi, dibutuhkan perangkat lunak untuk menyelesaikannya.

Untuk menggunakan matriks, diperlukan sistem kendala yang akan menjadi entri didalam sel-sel matriks, namun fungsi tujuan tidak diperlukan, kami hanya ingin mencari solusi optimum dari fungsi kendala.

$$g_1(v_1, v_2, v_3, v_4) = 61v_2 + 9v_3 - 7v_1 - 21v_4$$

$$g_2(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_2 - v_1 - 30$$

$$g_3(v_1, v_2, v_3, v_4) = 63v_1 - 36v_2 + 57v_3 - 42v_4 + 630$$

$$g_4(v_1, v_2, v_3, v_4) = 5v_4 - 3v_2 - 2v_3 - 180$$

Ubah bentuk sistem linear menjadi sebuah matriks dengan ordo 4×4 .

$$\begin{bmatrix} -7 & 61 & 9 & -21 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 63 & -36 & 57 & -42 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -630 \\ 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1175 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{805}{66} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1505}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1555}{22} \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \frac{-1175}{66}, v_2 = \frac{805}{66}, v_3 = \frac{1505}{22}, v_4 = \frac{1555}{22}$$

Dengan menggunakan aljabar linier, sistem kendala yang dihasilkan oleh analisis nodal dapat menemukan solusi optimal tanpa menggunakan sistem tujuan. Solusi optimal yang dihasilkan oleh Lagrange Multiplier dengan Matriks menunjukkan hasil yang sama, sehingga Lagrange Multiplier efektif digunakan untuk mencari solusi optimal dalam menurunkan kerugian daya.

V. KESIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa metode Lagrange Multiplier dapat digunakan secara efektif untuk meminimalkan rugi daya resistif pada rangkaian listrik, khususnya pada sistem non-planar yang kompleks. Melalui formulasi fungsi tujuan sebagai total rugi daya dan fungsi kendala berdasarkan analisis nodal serta Ohm, diperoleh solusi optimal yang sama dengan menggunakan Matriks.

Hasil analisis menunjukkan bahwa pendekatan Lagrang Multiplier mampu menghasilkan solusi tegangan $v_1 = -17.8030$, $v_2 = 12.1969$, $v_3 = 68.4090$, dan $v_4 = 70.6818$ sekaligus meminimalkan rugi daya total sebesar 663,26

Watt. Dengan demikian, metode ini memberikan alternatif yang efisien. Secara keseluruhan, metode Lagrange Multiplier terbukti relevan dan efisien dalam mengoptimalkan efisiensi energi listrik, hasilnya dapat divalidasi secara komputasional dengan menggunakan matriks bordered hessian untuk memastikan kondisi minimum yang diperoleh.

VI. SARAN

Penelitian selanjutnya dapat memperluas penerapan metode ini pada rangkaian AC atau sistem daya tiga fase, sehingga dapat menggambarkan kondisi nyata pada sistem transmisi dan distribusi listrik modern. Disarankan untuk mengintegrasikan metode Lagrange dengan pendekatan numerik lanjutan seperti metode Newton-Raphson atau algoritma metaheuristik (misalnya Genetic Algorithm) guna mempercepat konvergensi solusi pada sistem besar dengan banyak node.

Untuk keperluan validasi eksperimental, perlu dilakukan pengujian langsung menggunakan perangkat simulasi listrik seperti MATLAB/Simulink atau Multisim agar hasil komputasional dapat dibandingkan dengan model fisik yang sesungguhnya. Selain rugi daya resistif, penelitian lanjutan juga dapat mencakup rugi daya induktif dan kapasitif, sehingga model optimasi yang dihasilkan menjadi lebih komprehensif dalam menganalisis efisiensi total sistem tenaga listrik.

REFERENSI

- [1] Cence Power. (2022, December 20). *Can We Eliminate These 3 Types of Line Losses in Transmission Systems?*. Cance Power Blog.
- [2] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (11th ed.). Wiley.
- [3] Dorf, R. C., & Svoboda, J. A. (2020). *Introduction to Electric Circuits* (10th ed.). Wiley.
- [4] Rao, S. S. (2019). *Engineering Optimization: Theory and Practice* (5th ed.). Wiley.
- [5] Oliphant, T. E. (2006). *A Guide to NumPy*. Trelgol Publishing.
- [6] Vadlamani, S. K., Xiao, T. P., & Yablonovitch, E. (2020). *Physics successfully implements Lagrange multiplier optimization*. *Proceeding of the National Academy of Sciences*, 117(46), 28525-28531.
- [7] Bordered Hessian For Constrained Optimisation. (n.d.). Youtube. Upload by Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=qk_Jfkfc7i8.
- [8] William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Steven M. Durbin. Terbit sejak 1962 oleh McGraw-Hill Companies. *Engineering Circuit Analysis*, Six Edition.
- [9] Faouri, A. O., & Kasap, P. (2023). *Classical optimization techniques*. In *Science & Engineering Researches* (Chapter XIX, pp. 301–323). Ondokuz Mayıs University.
- [10] Law, E. (2022, December 20). *3 Types of Line Losses in Power Transmission*. Cence Power.
- [11] Castro, L.M., & colleagues. (2020). *Efficient method for the optimal economic operation including point-to-point VSC-HVDC using Lagrange multipliers*. *Energy Conversion and Management*.
- [12] Mohajan, H. K., & Mohajan, D. (2022). *A bordered Hessian approach for second-order conditions in constrained optimization*.
- [13] Tran, H. G., & colleagues. (2023). *Lagrange multiplier-based optimization for hybrid energy management in microgrids*. *Electronics*, 12(21), 4513.
- [14] Meng, L. (2024). *Bound-constrained optimization using Lagrange multiplier methods: comparisons and KKT considerations*. *Computers & Structures*.
- [15] Elazab, R. (2025). *Optimizing stand-alone microgrids with Lagrange multiplier methods: sizing and planning*. *Jurnal of Cleaner Production / Renewable Energy*.
- [16] Oliphant, T. E. (2020). *NumPy and scientific Python tools for optimization and simulation (update tutorial/documentation)*. SciPy / Trelgol Publishing.
- [17] The SymPy Development Team. (2024). *SymPy documentation – Lagrange multipliers and symbolic optimization examples*.
- [18] Authors. (2021). *A Lagrange multiplier-based state enumeration for reliability assessment in power system with renewables*. Konferensi / Prosiding.
- [19] Jiang, X. (2025). *Understanding the Lagrangian in constrained optimization*.
- [20] Arora, J. S. (2011). *Introduction to optimum design* (3th ed.). Elsevier.
- [21] Cheng, Q., Shen, J., & Wang, C. (2025). Unique solvability and error analysis of a scheme using the Lagrange multiplier approach for gradient flows. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 63(2), 772-799.
- [22] Cerone, V., Fosson, S. M., Pirrera, S., & Regruto, D. (2025). A new framework for constrained optimization via feedback control of lagrange multipliers. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [23] Liu, Z., Tang, P., Hou, K., Zhu, L., Li, Q., Zhao, F., & Jia, H. (2025). A lagrange-multiplier-based fast planning method for integrated community energy systems considering multiple uncertainties. *CSEE Journal of Power and Energy Systems*.
- [24] Doan, C. K., Hoang, T. T. P., Ju, L., & Lan, R. (2025). Dynamically Regularized Lagrange Multiplier Method for the Cahn-Hilliard-Navier-Stokes

System. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 126(13), e70074.

- [25] Elazab, R., Ewais, A. M., & Abu-Adma, M. A. (2025). Optimizing stand-alone microgrids with lagrange multiplier technique: A cost-effective and sustainable solution for rural electrification. *Franklin Open*, 10, 100199.
- [26] de Castro, A., Lee, H., & Wiecek, M. M. (2025). A Lagrange multiplier method for fluid-structure interaction: Well-posedness and domain decomposition. *Computers & Mathematics with Applications*, 181, 193-215.