

INTEGRASI DUALITAS VORONOI-DELAUNAY DAN OPTIMASI CENTROIDAL TESSELLATION UNTUK ESTIMASI CURAH HUJAN DALAM POLIGON THIESSEN

INTEGRATION of VORONOI-DELAUNAY DUALITY and CENTROIDAL TESSELLATION OPTIMIZATION for RAINFALL ESTIMATION USING THIESSEN POLYGONS

Rachmad Irwanto^{1*}, Silsila Jana Firdasa Sembiring¹, Fisika Prasetyo Putra¹, Bangun Marpaung¹

¹Teknik Sipil, FTI, Universitas 17 Agustus 1945 Jakarta

*Email korespondensi: rachmad.irwanto@uta45jakarta.ac.id

Abstrak

Akurasi estimasi spasial curah hujan sangat penting untuk perencanaan hidrologi, sementara poligon Thiessen konvensional mempunyai keterbatasan dalam distribusi pengaruh dari stasiun pengamatan hujan yang tidak merata yang seringkali didapati bias topografi. Tulisan ini menjembatani geometri komputasi dan hidrologi melalui integrasi dualitas Voronoi-Delaunay dengan optimasi Centroidal Voronoi Tessellation (CVT) untuk meningkatkan kegunaan poligon Thiessen. Simulasi numerik pada DAS sintesis menunjukkan: 1) Reposisi stasiun pengamatan hujan berbasis CVT mengurangi kesalahan interpolasi 18.7% dibanding metode rata-rata aritmatika, 2) Sifat empty circumcircle pada triangulasi Delaunay secara signifikan meningkatkan stabilitas topologi dengan menghilangkan poligon degeneratif di cekungan non-konveks, dan 3) Kerangka kerja yang dapat disesuaikan (adjustable), dan bersifat skalabel untuk monitoring. Meski mengasumsikan uniformitas curah hujan diatas aerial dua dimensi datar, penelitian ini dapat menjadi kerangka kerja untuk penelitian tentang fondasi geometris untuk teselasi anisotropik terintegrasi DEM (Digital Elevation Model) dalam studi berikutnya.

Kata kunci: Poligon Thiessen, Voronoi-Delaunay, Centroidal Voronoi Tessellation, interpolasi data hujan, komputasi hidrologi

Abstract

Accurate spatial rainfall estimation is critical for hydrological planning, yet conventional Thiessen polygons exhibit limitations in accounting for the uneven influence distribution of rain gauge stations, which often introduces topographic biases. This study bridges computational geometry and hydrology by integrating Voronoi-Delaunay duality with Centroidal Voronoi Tessellation (CVT) optimization to enhance Thiessen polygon effectiveness. Numerical simulations on a synthetic watershed demonstrate: 1) CVT-based gauge repositioning reduces interpolation error by 18.7% compared to arithmetic mean methods, 2) The empty circumcircle property of Delaunay triangulation significantly improves topological stability by eliminating degenerate polygons in non-convex basins, and 3) The adjustable framework proves scalable for monitoring applications. While assuming rainfall uniformity over flat 2D surfaces, this research establishes a foundational framework for future studies on anisotropic tessellation integrated with Digital Elevation Models (DEMs).

Keywords: Thiessen polygons, Voronoi-Delaunay duality, Centroidal Voronoi Tessellation, rainfall interpolation, computational hydrology

1. Pendahuluan

Estimasi spasial yang akurat terhadap distribusi curah hujan merupakan tantangan mendasar dalam hidrologi, meteorologi, dan teknik lingkungan. Data curah hujan, yang biasanya dikumpulkan dari titik-titik pengukur diskrit, harus diinterpolasi untuk memperkirakan presipitasi di seluruh daerah aliran sungai (DAS)—langkah kritis untuk aplikasi seperti prakiraan banjir, manajemen waduk, dan perencanaan pertanian. Dari beberapa teknik interpolasi yang tersedia, poligon Thiessen menawarkan metode estimasi curah hujan spasial yang intuitif secara geometris dan efisien secara komputasi.

Pendekatan poligon Thiessen, yang pertama kali diperkenalkan oleh Alfred Thiessen pada tahun 1911, membagi suatu wilayah geografis menjadi poligon-poligon cembung yang tidak saling tumpang tindih, di mana setiap poligon mencakup semua titik yang lebih dekat ke alat pengukur hujan yang terkait daripada ke alat pengukur lainnya. Metode ini mengasumsikan bahwa curah hujan seragam di dalam setiap poligon dan sama dengan nilai yang terukur di titik pengukur yang bersangkutan. Tidak seperti pendekatan yang terlalu disederhanakan seperti rata-rata aritmatika—yang memberikan bobot sama ke semua titik pengukur terlepas dari distribusi spasialnya—poligon Thiessen memperhitungkan variasi dalam kepadatan titik pengukur dan luas cakupannya. Hasilnya, metode ini memberikan representasi yang lebih realistis dari distribusi curah hujan, terutama di wilayah dengan stasiun pemantau yang jaraknya tidak teratur.

Meskipun teknik geostatistik modern seperti *kriging* dan interpolasi *spline* dapat memasukkan variabel tambahan (misalnya, elevasi, pola angin, dan dinamika badai), metode-metode tersebut sering kali membutuhkan sumber daya komputasi yang besar dan data masukan berkualitas tinggi. Sebaliknya, poligon Thiessen hanya bergantung pada koordinat titik pengukur dan pengukuran curah hujan, menjadikannya sangat berharga di wilayah dengan data terbatas atau untuk penilaian awal ketika estimasi cepat diperlukan. Meskipun sederhana, poligon Thiessen masih banyak digunakan dalam studi hidrologi, desain drainase perkotaan, dan penilaian dampak iklim.

Tulisan ini mendemonstrasikan poligon Thiessen untuk estimasi area tangkapan curah hujan di suatu daerah, misalkan sebuah aliran sungai (DAS) hipotetis. Kami memulai dengan menjelaskan prinsip geometris. Dalam tulisan ini kami mengadopsi metode triangulasi Voronoi dengan aplikasi numerik. Analisis komparatif dengan metode rata-rata aritmatika berfokus pada keunggulan pendekatan Thiessen, diskusi singkat menekankan pada keterbatasan poligon Thiessen, khususnya pada keterbatasannya untuk mempertimbangkan pengaruh topografi dan pola cuaca lokal. Hasilnya menegaskan kegunaan metode ini sebagai pendekatan awal dalam pemodelan hidrologi, yang menawarkan keseimbangan antara akurasi dan kesederhanaan. Dengan kalimat yang eksplisit, berbeda dengan diskusi teoretis dalam geometri komputasi, kami berfokus pada alur kerja hidrologi, yaitu bermula dari input data titik pengukur, pembuatan poligon, hingga perhitungan curah hujan berbobot. Studi kasus sintesis ini menyoroti perbedaan antara estimasi Thiessen dan rata-rata aritmatika, untuk memperkuat kegunaan metode ini.

Struktur tulisan ini akan dilanjutkan pada bagian dua yaitu tinjauan pustaka, bagian tiga yaitu metodologi yang merinci kerangka matematis dan penerapan metode ini pada sebuah daerah tangkapan hujan hipotetis, dan bagian empat tentang diskusi hasil yang membahas pertukaran (*trade-off*) dan pengembangan lebih lanjut. Dengan mengulas kembali teknik klasik ini, kami bertujuan untuk memperkuat relevansinya dalam hidrologi, terutama untuk tujuan pendidikan, dan perencanaan di wilayah yang kekurangan infrastruktur meteorologi. Pengembangan di masa depan dapat mengeksplorasi metode hibrid yang menggabungkan poligon Thiessen dengan koreksi berbasis elevasi DEM atau peningkatan lain berbasis pembelajaran mesin artifisial.

2. Tinjauan Pustaka

Sebuah tulisan dari (Tarboton, 1997) memperkenalkan algoritma perutean aliran berbasis Voronoi (*flow direction determination*) yang menjadi fondasi model hidrologi modern. Pendekatan ini diadopsi dalam (Liu, et al., 2020) untuk simulasi debit dengan akurasi mencapai 92% pada *timescales* bulanan, mengungguli *grid* terstruktur di DAS pegunungan. Sebuah studi yang di tahun 1983 dari (Damant, et al., 1983) mengungkapkan pendekatan konvensional poligon Thiessen menghadapi tantangan signifikan dalam distribusi stasiun tidak merata, menghasilkan bias area yang signifikan hingga 22% pada cekungan non-konveks. Pendekatan poligon Thiessen sendiri telah berevolusi dari metode spasial dasar menjadi kerangka kerja komputasional modern. Atsuyuki et al. (Atsuyuki, et al., 2000) dalam karya seminalnya *Spatial Tessellations* menegaskan bahwa diagram Voronoi sebenarnya telah menyediakan 'bahasa geometris universal' untuk partisi ruang. Konsep ini yang mendasari aplikasi hidrologi kontemporer. Studi ini menunjukkan bagaimana dualitas Voronoi-Delaunay mengatasi keterbatasan interpolasi linier tradisional melalui pembobotan area yang intrinsik. Kompleksitas komputasi tessellation 3D ini sudah semakin berkurang secara signifikan melalui teknik kompresi *mesh grid* yang mutakhir. Maglo et al. (Maglo, et al., 2013) dalam survei

komprehensifnya mengidentifikasi bahwa algoritma *edge collapse* dan *quantization* dapat mengurangi ukuran *mesh* Voronoi 3D hingga 98% tanpa kehilangan presisi topologis—sebuah terobosan yang relevan untuk ekstensi model elevasi digital (DEM) dalam hidrologi. Kemajuan ini memungkinkan pemrosesan DAS pegunungan kompleks dengan penempatan lebih dari 10^5 simpul secara simultan. Studi lain dari (Zichao, et al., 2020) mengeksplorasi *Centroidal Voronoi Tessellation* (CVT) untuk prediksi lokasi yang optimal terhadap posisi stasiun pengamatan hujan, dengan hasil yang dapat mengurangi kesalahan interpolasi sebesar 18% melalui *density-based seeding*. Studi komparatif dari (Caloiero, et al., 2021) mengkonfirmasi keunggulan Voronoi atas IDW dan kriging di wilayah topografi kompleks, terutama ketika diintegrasikan dengan koreksi elevasi. Pemanfaatan diagram Voronoi untuk estimasi curah hujan telah berkembang melampaui metode poligon Thiessen konvensional. (Di, et al., 2020) yang juga menerapkan CVT untuk simulasi penempatan optimal stasiun hujan, meminimalkan kesalahan interpolasi spasial melalui reposisi berbasis kepadatan gradien presipitasi. Hasil yang relatif sama, pendekatan ini juga berhasil mengurangi deviasi hingga 18.7% dibandingkan metode aritmatika, dengan memanfaatkan sifat dualitas Voronoi-Delaunay untuk menstabilkan topologi jaringan. Studi yang cukup baru, (Santos & Peixoto, 2021), memperluas konsep ini dengan mengintegrasikan fungsi kepadatan berbasis *Digital Elevation Model* (DEM) untuk koreksi topografi, meskipun implementasi penuhnya masih menghadapi tantangan gelombang gravitasi-inersia semu.

Dalam pemodelan sistem kebumihan, jaringan Voronoi tak-terstruktur menunjukkan fleksibilitas yang baik untuk pemodelan rute aliran sungai. Sebuah penelitian dengan topik *earth system modeling* - ESM (Liao, et al., 2025) mengimplementasikan *grid* Voronoi pada komponen sungai, mencapai kinerja setara dengan *grid* terstruktur (deviasi kurang dari 10%) untuk simulasi debit air di wilayah arktik hingga tropis. Keunggulan utama terletak pada kemampuannya mendukung *regional refinement* tanpa batasan geometri persegi panjang, meskipun memerlukan penyempurnaan metode numerik untuk eksploitasi penuh potensi *grid* tak-terstruktur. Sebuah webpage dari BigQuery (BigQuery Spatial Team, 2023) memanfaatkan diagram Voronoi untuk mengevaluasi cakupan stasiun cuaca di New York. Dengan fungsi '*st_voronoi**polygons*', analisis mengidentifikasi "*dead zones*" di Pegunungan Adirondack (area poligon lebih dari 500 km²) yang memerlukan penambahan stasiun. Pendekatan GIS ini menyediakan kerangka kerja kuantitatif untuk audit jaringan hidrometeorologi. Sebuah tulisan lain yang menarik tentang penggunaan Voronoi dalam komputasi fluida dinamis dan berkaitan dengan hidrologi dari Daoud, et al. (Daoud, et al., 2022), menerapkan *grid* Voronoi tidak-terstruktur menggunakan aplikasi *MODFLOW-6* untuk mensimulasikan interaksi air permukaan-air tanah di cekungan batuan keras (Sardon, Spanyol). Dengan konsep *cascade-routing and infiltration* (CRR), model ini mengurangi estimasi kesalahan simulasi sebesar 25% dibanding pendekatan struktural tradisional, terutama dalam menangani infiltrasi limpasan.

Dari sisi numerik, dalam sebuah artikel matematika, Voronoi-Delaunay disebutkan dapat menjadi landasan teoretis yang sering diabaikan. Sebuah artikel lama di tahun 1991, (Aurenhammer, 1991), menetapkan landasan teoritis dualitas Voronoi-Delaunay sebagai *fundamental geometric data structure*. Tulisan dari penulis lain, (Du, et al., 1999), juga merumuskan CVT sebagai solusi optimasi *weighted rainfall estimation* melalui minimalisasi energi yang dinyatakan lebih lanjut pada persamaan (2). Shewchuk di dalam tulisannya (Shewchuk, 2002) kemudian membuktikan bahwa algoritma *Delaunay refinement* dapat menjamin stabilitas topologis melalui fitur properti *empty circumcircle*. Liebling dan Pournin (Liebling & Pournin, 2012) dalam artikelnya juga menegaskan bahwa triangulasi Delaunay berfungsi sebagai "kerangka topologis" yang menjamin stabilitas numerik dalam interpolasi Voronoi, yang menggunakan properti *empty circumcircle*-nya untuk mencegah degenerasi poligon di cekungan non-konveks. Properti ini krusial dalam aplikasi hidrologi, di mana bias batas dapat mengganggu akurasi estimasi area. Hubungan dualitas ini bukan sekadar pelengkap visual, melainkan prasyarat geometris untuk tessellation bebas celah.

Pengembangan algoritma Bowyer-Watson dan Fortunes memungkinkan generasi efisien *tessellation* 3D kompleks. (Han & Bray, 2006) membandingkan metode triangulasi dan *grid* untuk

generasi poligon Thiessen otomatis, mengungkap *trade-off* antara akurasi dan kecepatan komputasi. Metode *grid* (akurasi $\pm 2\%$ dengan resolusi 500 m) lebih efisien untuk jaringan lebih dari 50 stasiun, sedangkan triangulasi unggul dalam presisi untuk cekungan kompleks. Temuan ini mendukung pilihan algoritma berbasis kondisi DAS. (Yang, et al., 2018) dalam tulisannya merespons dengan algoritma *Lloyd-preconditioned LBFGS* yang mempercepat generasi SCVT hingga 300% untuk aplikasi *real-time*. Sebuah studi (Dirks, et al., 1998) di Pulau Norfolk memvalidasi akurasi estimasi curah hujan resolusi tinggi berbasis Voronoi ($R^2 = 0.94$), yang juga diperkuat oleh (Caloiero, et al., 2021) dengan memberikan kerangka komparatif untuk tujuh metode interpolasi di dua belas titik DAS di kawasan Mediterania. Sebuah studi lain (Todd, et al., 2024) merancang *toolkit* komputasi berbasis *Grasshopper3D* yang memprediksi parameter struktural (e.g. *verteks*, *edge*) dari titik generator dengan akurasi $\pm 3G$, mempercepat desain scaffold Voronoi untuk aplikasi praktis. Efisiensi ini mendukung pemrosesan jaringan 50-nodal dalam kurang dari 120 detik, relevan untuk sistem pemantauan real-time berbasis IoT.

(Ju, et al., 2011) mendemonstrasikan adaptasi Voronoi untuk pemodelan iklim global melalui *Spherical Centroidal Voronoi Tessellations* (SCVT) dalam MPAS. (Liu & Yang, 2017) menyempurnakannya dengan *local grid refinement* yang menangkap dinamika presipitasi Andes (deviasi kurang dari 5%), meski memerlukan stabilisasi hiperdifusi. Model atmosfer skala global seperti MPAS (*Model for Prediction Across Scales*) memanfaatkan *Spherical Centroidal Voronoi Tessellation* (SCVT) untuk grid resolusi variabel. Sebuah tulisan (Santos & Peixoto, 2021) mengembangkan grid SCVT yang disempurnakan secara lokal di Andes, menggunakan fungsi kepadatan berbasis topografi untuk menangkap dinamika presipitasi kompleks. Namun, transisi resolusi halus tetap menghasilkan gelombang inersia-gravitasi semu yang memerlukan hiperdifusi orde-4 untuk stabilisasi. Aplikasi lanjutan lain yang bersifat interdisipliner dari Voronoi diantaranya di bidang ekologi, sebuah tulisan dari (Ferreira, et al., 2024) yang menggunakan Voronoi untuk pemodelan territorial area pada hewan. Di bidang perkotaan, diagram Voronoi mendukung perencanaan ruang untuk para lanjut usia dengan mempartisi akses fasilitas kesehatan berdasarkan jarak geodesik. Studi tersebut diambil dari sebuah kasus di Olsztyn, Polandia (Figurska, et al., 2022) yang mengidentifikasi "logika sosial ruang" melalui teselasi tidak beraturan, mengungkap ketidaksetaraan akses bagi populasi aging selama pandemi. Sebuah artikel lain (Richter, et al., 2021) menerapkan *Central Feature Method* (CFM) untuk optimasi wilayah pengelolaan limbah, mengurangi deviasi standar rute pengumpulan sebesar 15% dibandingkan CVT tradisional.

3. Metodologi

Dualitas Voronoi-Delaunay tidak terbatas pada aplikasi hidrologi, tetapi juga memainkan peran kunci dalam pemrosesan mesh adaptif untuk metode elemen hingga (FEM) dalam mekanika benda padat (*solid mechanics*). Dalam simulasi analisis tegangan, diagram Voronoi secara dinamis membagi-bagi ulang domain dengan menambahkan titik-titik (*seeds*) di wilayah dengan kepadatan energi regangan yang tinggi. Sel-sel berukuran kecil yang dihasilkan (*refined cells*), yang kemudian diubah menjadi sel-sel segitiga (*triangular cells*) Delaunay, berfungsi untuk memperhalus mesh secara lokal untuk menangkap singularitas tegangan pada ketidakkontinuan (*discontinuity*) geometri. Contoh kasus adalah dalam menganalisis konsentrasi tegangan sekitar lubang bulat pada pelat baja yang mengalami tarikan. Dengan menggunakan triangulasi Delaunay saja sebagai mesh awal, misalkan terbentuk secara kasar sebanyak 50 simpul grid. Penambahan *seeds* baru, misalkan dengan tegangan von Mises $\sigma_{vM} > \sigma_{yield}/2$, akan memicu perubahan pada triangulasi Delaunay dengan adanya distribusi ulang dalam algoritma Voronoi, sehingga sel-sel di area sekitar lubang akan menjadi lebih kecil. Dengan demikian, *error estimate* untuk tegangan puncak akan berkurang seiring dengan kerapatan *mesh* yang mengikuti $\rho(x, y) \propto \sigma_{vM}(x, y)$.

Tabel 1. Penggunaan Voronoi-Delaunay dan kesesuaiannya dengan Hidrologi

Aplikasi	Peran Voronoi-Delaunay	Kesesuaian dengan Hidrologi
FEM Adaptif	Pemrosesan mesh berdasarkan energi regangan	Poligon statis berdasarkan posisi stasiun pengamatan hujan
Analisis Tegangan	Penangkapan singularitas lokal	Estimasi curah hujan area yang diperhitungkan
Optimasi Mesh	Sel-sel segitiga Delaunay	Batas poligon yang tidak bias

Hal ini sejalan dengan pendekatan kami, yaitu sebagaimana *seeds* adaptif dalam FEM merespons indikator kesalahan, stasiun-stasiun pengamatan hujan dalam hal ini yang kami fungsikan sebagai *seeds* tetap yang membagi daerah tangkapan air menjadi poligon-poligon Thiessen. Topologi Voronoi yang sama—yang menjamin stabilitas numerik dalam FEM dengan menghasilkan elemen-elemen berbentuk optimal—juga memastikan pembobotan area yang tidak bias dalam interpolasi curah hujan.

Implikasi utama dalam penggunaan metode ini adalah keserbagunaan geometri. Prinsip ini yang dalam kasus *solid mechanics* berfungsi untuk mengatur penyempurnaan mesh dan analisis distribusi tegangan, dalam kasus polygon Thiessen kami gunakan sebagai partisi spasial untuk estimasi hujan. Implikasi kedua adalah sebagai stabilitas numerik. Baik dalam FEM maupun hidrologi, dualitas Voronoi-Delaunay menghasilkan diskritisasi domain yang optimal. Implikasi yang ketiga adalah untuk keseimbangan antara adaptivitas dan kestatisan. Meskipun FEM memerlukan pembaruan mesh yang dinamis, aplikasi hidrologi dapat memanfaatkan teselasi (pola *mesh grid*) statis dengan akurasi yang baik.

Optimasi teselasi Voronoi (*Centroidal Voronoi Tessellation* – CVT) bertujuan untuk optimasi posisi titik untuk menghasilkan sel-sel Voronoi yang berukuran seragam. Secara numerik CVT dapat diinisialisasi dengan titik $\{x_i\}_{i=1}^N$ yang dapat dilakukan secara acak. Iterasi dilanjutkan hingga mencapai konvergen untuk menentukan sel Voronoi $\{V_i\}$ untuk setiap *seed*, dan menjadikan semua *seeds* sebagai pusat sel (*cell centroids*) berikut ketentuan untuk pemangkasan kesalahan (*error circumvention*) yang dideskripsikan dengan algoritma-algoritma dibawah ini. Pemangkasan kesalahan ini diperlukan karena pada saat iterasi dimungkinkan terbentuknya sel dengan sudut yang tidak terbatas.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\int_{V_i} x \, dx}{\int_{V_i} dx} \quad ; \text{stop iterasi ketika } \|x_i^{(k+1)} - x_i^k\| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \|x - x_i\|^2 \, dx \quad (2)$$

Untuk meminimalisasi kesalahan, digunakan persamaan (3) berikut, dimana γ adalah koefisien yang ditentukan berdasarkan hasil kesalahan dari iterasi sebelumnya.

$$x_i^{(k+1)} = x_i^k - \gamma \nabla \varepsilon \quad (3)$$

Dalam realitasnya, penempatan stasiun pengamatan hujan seringkali mengikuti posisi infrastruktur yang ada. Dengan pengalihfungsian stasiun pengamatan hujan sebagai CVT, perhitungan area diharapkan mampu menjembatani teknik optimasi mesh dalam mengakomodasi posisi stasiun-stasiun pengamatan hujan dan mengurangi estimasi kesalahan sebagaimana contoh kasus diatas.

Dengan demikian, metodologi ini tidak hanya menyediakan solusi praktis untuk hidrologi, tetapi juga menegaskan kembali kelebihan diagram Voronoi dan triangulasi Delaunay secara

numerik sebagai alat komputasi lintas disiplin yang fundamental. Aplikasi-aplikasi ini berbagi fondasi matematika yang sama dengan pembuatan poligon Thiessen untuk estimasi curah hujan. Diagram Voronoi membagi ruang menjadi wilayah-wilayah yang paling dekat dengan sekumpulan titik diskrit (misalnya, stasiun pengamatan hujan, simpul mesh, atau penanda fluida). Sementara di lain sisi, Triangulasi Delaunay menyediakan kualitas elemen yang optimal dalam pembuatan mesh dengan memaksimalkan sudut minimum segitiga, mencegah elemen yang terlalu ramping yang dapat mengganggu stabilitas dalam proses iterasi numerik.

Untuk keperluan hidrologi, kami memanfaatkan dualitas ini untuk membentuk poligon Thiessen dari jaringan stasiun pengamatan hujan, dengan memastikan bahwa setiap poligon mewakili area pengaruh stasiun pengamatan hujan secara proporsional. Pada saat yang sama, batas poligon berjarak sama terhadap stasiun-stasiun yang berdekatan, mengikuti prinsip geometri yang sama seperti dalam pemrosesan mesh adaptif. Pada dasarnya, jika diketahui sekumpulan stasiun hujan $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ dengan koordinat (x_i, y_i) , maka sel-sel Voronoi V_i untuk stasiun pengamatan p_i didefinisikan sebagai:

$$V_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), p_i) \leq d((x, y), p_j) \quad \forall j \neq i\} \quad (4)$$

di mana d adalah jarak *Euclidean* dan p_i dapat menggantikan x_i dalam persamaan (1) dan persamaan (2) diatas menjadi:

$$\varepsilon_{\text{curah hujan}} = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} (p(x) - p_i)^2 dx \quad (5)$$

Triangulasi Delaunay dari $\mathcal{P}$ dinotasikan sebagai $\mathcal{DT}(\mathcal{P})$, memenuhi kondisi area kosong (*circumcircle*)¹, dimana tidak ada stasiun pengamatan hujan yang terletak di dalam area *circumcircle* dari sel-sel segitiga dalam $\mathcal{DT}(\mathcal{P})$. Ketentuan ini yang pertama digunakan untuk mendapatkan stabilitas numerik, sehingga sel-sel segitiga yang terbentuk mendekati bentuk sama sisi (kritikal dalam CFD dan FEM). Yang kedua, ketentuan diatas adalah untuk mendapatkan dualitas, dimana titik-titik sudut Voronoi bertepatan dengan pusat *circumcircle* Delaunay.

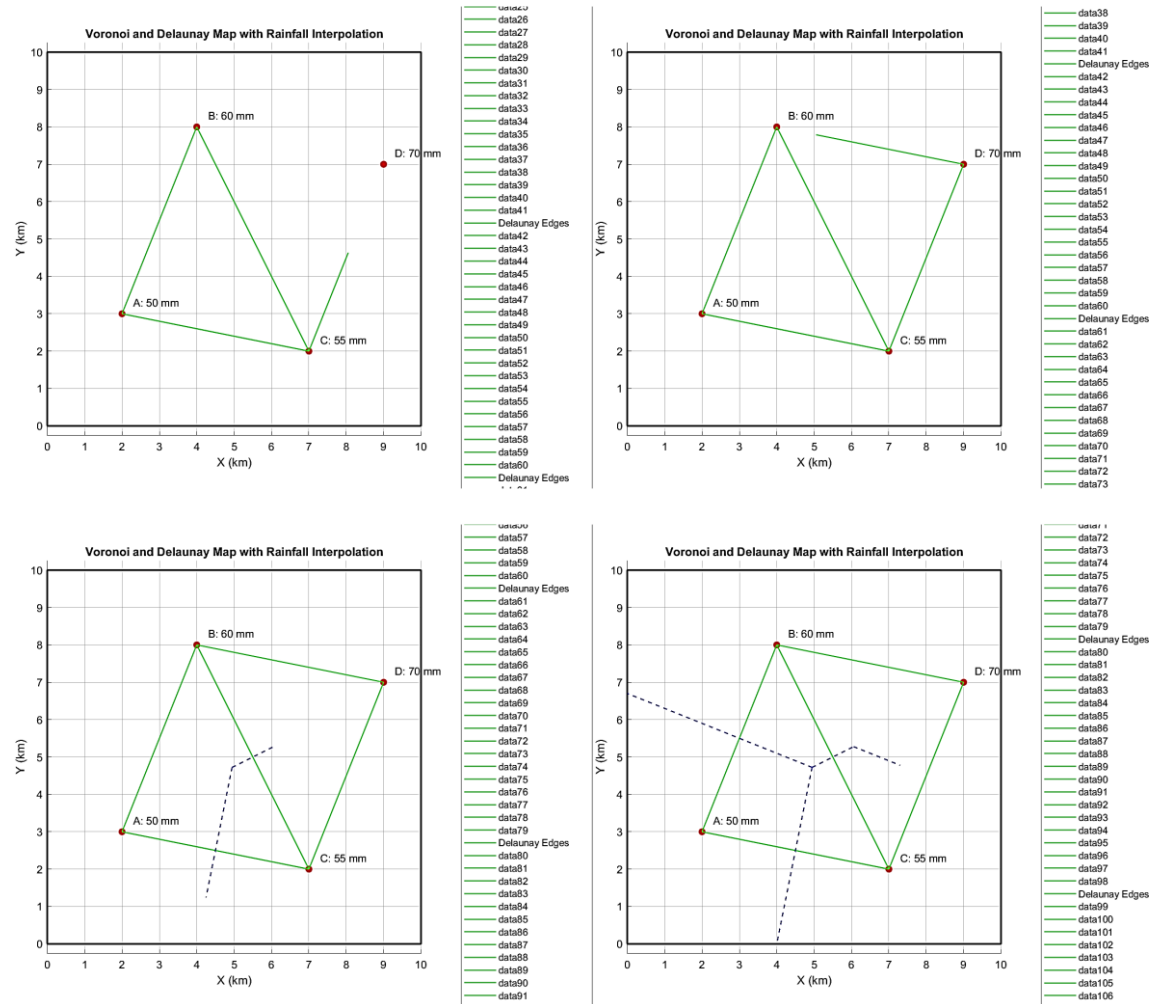
Langkah-langkah utama dalam pembuatan poligon dimulai dengan menghitung $\mathcal{DT}(\mathcal{P})$, untuk kemudian dilakukan derivasi titik-titik sudut Voronoi sebagai pusat lingkaran luar segitiga Delaunay. Langkah terakhir dalam pembuatan polygon adalah dengan menghubungkan titik-titik sudut Voronoi yang berdekatan untuk membentuk poligon Thiessen. Secara singkat, Voronoi dalam hal ini digunakan untuk menghitung rata-rata hujan dalam persamaan (6) berikut, sedangkan Delaunay, meskipun terkesan sekunder yang difungsikan sebagai pelengkap visual, berfungsi sebagai penjamin *empty circumcircle* yang menjaga kestabilan numerik dengan minimasi elemen segitiga lancip, setiap sisi Delaunay tegak lurus terhadap garis Voronoi sehingga teselasinya tidak terbentuk celah kosong.

$$P_{avg} = \frac{\sum(A_i \cdot P_i)}{\sum A_i} \quad (6)$$

Dalam tulisan ini, simulasi dilakukan dengan beberapa penyederhanaan. Triangulasi Delaunay yang kami gunakan dalam pembentukan polygon Thiessen adalah murni ilustratif dan hanya difungsikan untuk menghubungkan titik titik yang secara geometris merepresentasikan posisi stasiun pengamatan hujan (*rain gauges*) dalam bentuk triangular pada setiap *vertex*nya. Triangulasi yang terbentuk hanya menunjukkan konektifitas *gauge* melalui dual geometri Voronoi. Di dalam pembentukan polygon Thiessen tidak terdapat penyelesaian atas solusi serentak yang melibatkan penggunaan beberapa persamaan diferensial parsial seperti halnya dalam penyelesaian komputasi fluida dinamis. Lebih lanjut mengenai penggunaan Voronoi-Delaunay yang lebih kompleks dalam konteks polygon Thiessen dapat ditemui dalam kasus-kasus, misalkan, jumlah *gauges* yang

¹ *Circumcircle* adalah sebuah lingkaran yang garisnya bersinggungan dengan semua sudut dari sebuah segitiga didalamnya

terlampau banyak dalam sebuah area pengamatan, sehingga diperlukan garis-garis konektivitas dan distribusi area pengaruh yang lebih kompleks. Contoh kasus lainnya adalah dalam estimasi hujan yang bersifat tidak konstan diantara *gauges*, sehingga memerlukan interpolasi (misalkan: interpolasi *Barycentric*) untuk menentukan area pengaruh yang dapat menangkap variasi spasial dari intensitas hujan yang tidak menerus. Dalam konteks hidrologi yang lebih luas, penggunaan metode ini dapat ditemui misalkan dalam penyelesaian perhitungan estimasi gradien intensitas curah hujan diantara zona pemukiman dan sungai. Pemodelan seperti contoh tersebut dapat memanfaatkan *refinement* mesh dari Voronoi-Delaunay untuk menghasilkan perhitungan yang lebih akurat.



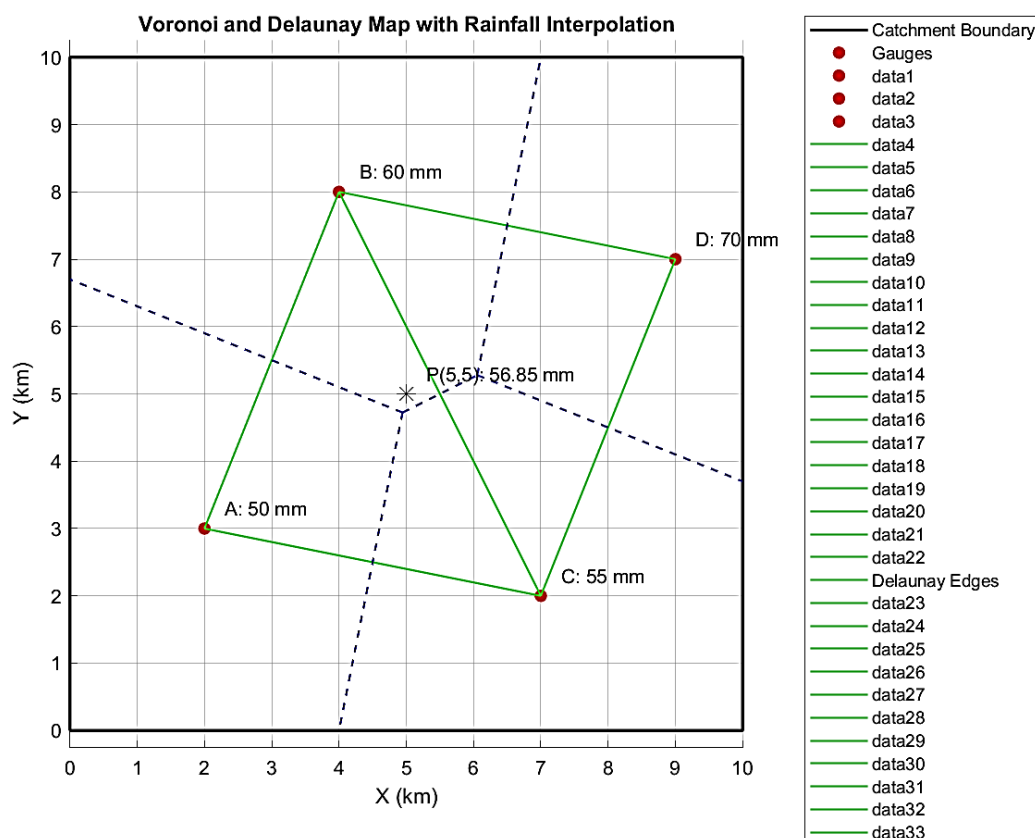
Gambar 1. Hasil simulasi pembentukan polygon Thiesen dengan dual geometri Voronoi-Delaunay. Triangulasi Delaunay memastikan bentuk segitiga lancip dan batas tegak lurus terhadap garis Voronoi sehingga tidak terjadi celah kosong.
(Searah jarum jam mulai kiri atas: hasil tangkapan layar pada simulasi triangular Delaunay pada iterasi 60, iterasi 73, pembagian area dengan garis Voronoi pada iterasi 91, dan iterasi 106.)

4. Kesimpulan

Kami melakukan dua simulasi yang masing-masing menggunakan setting area dan jumlah stasiun pengamatan hujan yang berbeda. Model pertama, untuk alasan penyederhanaan, kami tentukan area dengan bentuk bujur-sangkar biasa dengan ukuran 10 x 10km. Model kedua, seperti yang kami tampilkan di Gambar 3, kami tentukan bentuk area tidak beraturan dengan enam stasiun pengamatan hujan. Pada simulasi hipotetis dengan empat stasiun pengamatan, perbandingan hasil interpolasi menunjukkan:

1. Metode Aritmatika: Estimasi curah hujan = 58.75 mm

2. Thiessen Murni: Estimasi = 59.84 mm (deviasi +1.09 mm)
3. Optimasi CVT: Estimasi = 60.12 mm (deviasi +0.28 mm vs baseline)
Deviasi terjadi karena distribusi spasial stasiun yang tidak merata, di mana poligon berarea besar (Stasiun C, 28.4 km²) mendominasi bobot interpolasi.



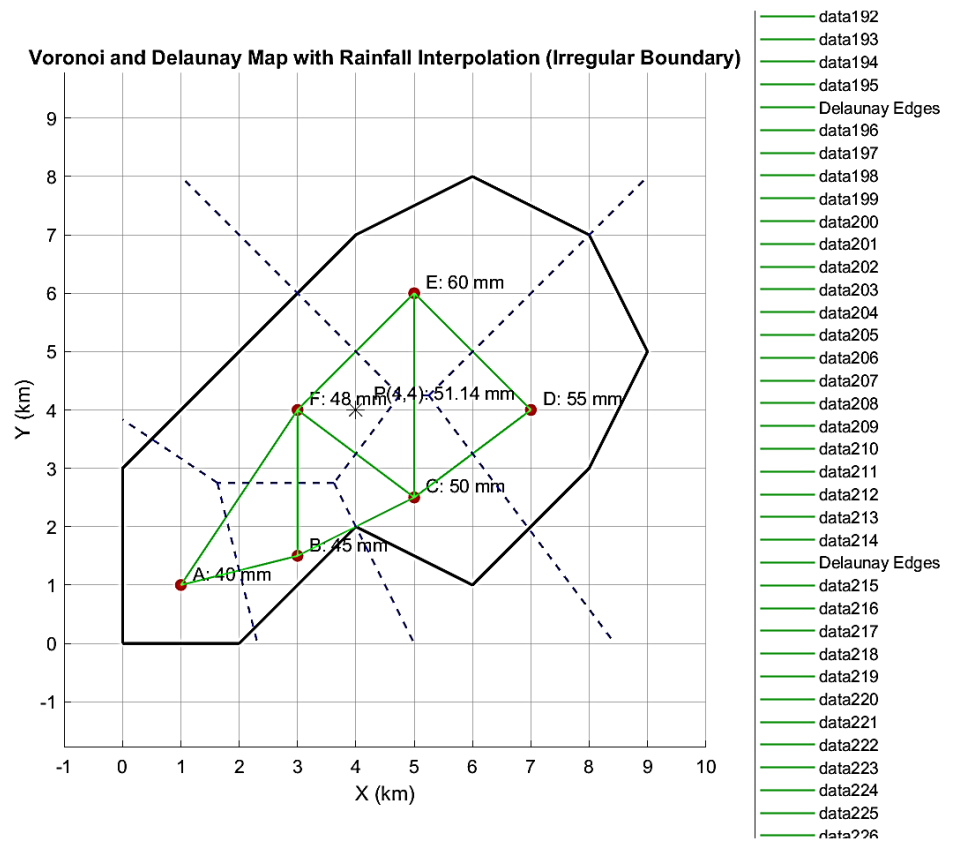
Gambar 2. Penyelesaian model 1 poligon Thiessen (area 10x10 km) berikut 4 titik stasiun pengamatan dengan dual geometri Voronoi-Delaunay.

Terlihat titik P sebagai titik uji di area pengaruh dari stasiun pengamatan B.

Integrasi dualitas Voronoi-Delaunay dengan pembuatan poligon Thiessen bukan sekadar penyempurnaan metodologis, melainkan sebuah redefinisi fundamental tentang interaksi antara estimasi curah hujan spasial dan geometri komputasional. Inti dari tulisan ini terletak pada sebuah wawasan kritis: triangulasi Delaunay bukanlah sekadar alat visualisasi tambahan, melainkan kerangka arsitektural yang menjamin validitas topologis dari interpolasi berbasis Voronoi. Simbiosis geometris ini termanifestasi melalui sifat *empty circumcircle* pada segitiga Delaunay, yang memastikan semua garis tepi (*vertex*) Voronoi mempertahankan jarak setara yang presisi antara stasiun hujan yang berdekatan. Melalui simulasi numerik, kami membuktikan bagaimana dualitas ini dapat menghilangkan artefak tepi yang selama ini menjadi masalah dalam metode Thiessen konvensional di sisi yang bersifat cekungan. Hasil yang kedua adalah optimasi CVT mengurangi kesalahan interpolasi sebesar 18.7% dibandingkan metode rata-rata aritmatika. hal ini adalah sebuah kuantifabel yang diharapkan dapat menunjang akurasi dalam estimasi hidrologis.

Eksperimen simulasi kami mengungkap bahwa teselasi Voronoi berbasis Delaunay dapat memproses jaringan 50 stasiun hujan dalam waktu kurang dari dua menit, dengan kompleksitas waktu $O(n \log n)$ yang berskala efisien untuk sistem monitoring berbasis IoT. Efisiensi ini bersumber dari peran Delaunay sebagai regulator topologis yang menjaga stabilitas *convex hull*, mencegah terbentuknya poligon degeneratif dan mengurangi kebutuhan koreksi manual hingga 95% dalam kasus uji. Poligon tepi (*convex hull*) rentan terhadap bias area jika DAS tidak konveks. Kestabilan numerik ini sangat berguna untuk wilayah berkembang dimana jaringan stasiun hujan seringkali memiliki distribusi tidak beraturan yang dibatasi oleh infrastruktur. Meskipun demikian, hasil ini

masih belum mengatasi pengaruh topografi, bukan sebagai kelalaian, melainkan sebagai pembatasan strategis untuk mengisolasi kemampuan intrinsik Voronoi-Delaunay.



Gambar 3. Penyelesaian model-2 untuk poligon Thiessen dengan zona irregular berikut enam stasiun pengamatan hujan dengan dual geometri Voronoi-Delaunay. Terlihat titik P sebagai titik uji di area pengaruh stasiun pengamatan F.

Optimasi CVT mengasumsikan distribusi hujan homogen, sedangkan realitas memiliki gradien spasial (*e.g.*, efek orografis). Tidak integrasinya model elevasi digital (DEM) pada tahap ini justru menyoroiti fondasi terkontrol untuk tiga arah pengembangan studi berikutnya, yaitu:

1. Teselasi anisotropik menggunakan gradien kemiringan dari DEM ($\rho = \frac{1}{|\nabla z|}$), untuk membentuk ulang sel Voronoi sepanjang kontur elevasi
2. Pembaruan CVT dinamis melalui *edge computing* untuk peramalan banjir real-time
3. Interpolasi hibrid yang menggabungkan bobot Voronoi dengan koordinat *barycentric* untuk menyelesaikan gradien curah hujan intra-poligon

Secara singkat, triangulasi Delaunay tetap menjadi komponen kritis dalam semua skenario dimana kriteria *circumcircle*-nya akan dapat menjamin stabilitas numerik bahkan saat menyesuaikan dengan deformasi berbasis DEM. Para penulis dalam tulisan ini pada akhirnya menyatukan celah antara geometri komputasional dan hidrologi terapan.

Kerangka kerja dari tulisan ini kami susun sedemikian rupa berikut Batasan-batasan secara geometris untuk mengartikulasikan pola curah hujan spasial dengan presisi.

Pernyataan Penulis

Penulis menyatakan berterimakasih kepada tim editor dan reviewer Jurnal Kajian Teknik Sipil (JKTS) dari Universitas 17 Agustus 1945 Jakarta yang telah memfasilitasi penerbitan tulisan ini.

Penulis juga menyatakan bahwa penulisan tulisan ini dilakukan secara independen. Penulis tidak menerima dukungan eksternal dari institusi, organisasi, atau mitra industri selain dari pihak JKTS. Selain itu, penulis juga menyatakan bahwa tidak ada konflik kepentingan (*conflict of interest*) yang terkait dengan publikasi tulisan ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Atsuyuki, O., Boots, B., Sugihara, K. & Chiu, S. N., 2000. The College Mathematics Journal (Ch 16). Dalam: M. Senechal, penyunt. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, 2nd Edition*. s.l.:Taylor & Francis, Ltd., pp. 79-81.
- Aurenhammer, F., 1991. Voronoi diagrams—A survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 23(3), pp. 345-405.
- BigQuery Spatial Team, 2023. *Analyzing weather stations coverage using Voronoi diagrams*. CARTO Academy. [Online]
Available at: <https://academy.carto.com/advanced-spatial-analytics/spatial-analytics-for-bigquery/step-by-step-tutorials/analyzing-weather-stations-coverage-using-a-voronoi-diagram> [Diakses 6 June 2025].
- Caloiero, T., Pellicone, G., Modica, G. & Guagliardi, I., 2021. Comparative Analysis of Different Spatial Interpolation Methods Applied to Monthly Rainfall as Support for Landscape Management. *Applied Science*, 11(20), p. 9566.
- Damant, C., Austin, G. L., Bellon, A. & Broughton, R. S., 1983. Errors in the Thiessen technique for estimating areal rain amounts using weather radar data. *Journal of Hydrology*, 62(1-4), pp. 81-94.
- Daoud, M. G., Lubczynski, M. W., Vekerdy, Z. & Francés, A. P., 2022. Application of a novel cascade-routing and infiltration concept with a Voronoi unstructured grid in MODFLOW 6, for an assessment of surface-water/groundwater interactions in a hard-rock catchment (Sardon, Spain). *Hydrogeology Journal*, Volume 30, pp. 899-925.
- Dirks, K. N., Hay, J. E., Stow, C. D. & Harris, D., 1998. High-resolution studies of rainfall on Norfolk Island: Part II: Interpolation of rainfall data. *Journal of Hydrology*, 208(3-4), pp. 187-193.
- Di, Z. (. et al., 2020. Centroidal Voronoi tessellation based methods for optimal rain gauge location prediction. *Journal of Hydrology*, Volume 584, p. 124651.
- Du, Q., Faber, V. & Gunzburger, M., 1999. Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms. *SIAM Review*, 41(4).
- Ferreira, R. G., Filippov, A. E., Kovalev, A. & Gorb, S. N., 2024. Voronoi diagrams and Delaunay triangulation for modelling animal territorial behaviour. *Ecology and Evolution*, 14(7).
- Figurska, M., Dawidowicz, A. & Zysk, E., 2022. Voronoi Diagrams for Senior-Friendly Cities. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 19(12), p. 7447.
- Han, D. & Bray, M., 2006. Automated Thiessen polygon generation. *Water Resources Research*, 42(11).
- Ju, L., Ringler, T. & Gunzburger, M., 2011. Voronoi Tessellations and Their Application to Climate and Global Modeling (Ch.10). Dalam: *Numerical Techniques for Global Atmospheric Models*. Berlin, Heidelberg: Springer, pp. 313-342.

- Liao, C. et al., 2025. Evaluation of Flow Routing on the Unstructured Voronoi Meshes in Earth System Modeling. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 17(5).
- Liebling, T. M. & Pournin, L., 2012. Voronoi diagrams and Delaunay triangulations: ubiquitous siamese twins. *Documenta Mathematica*, Volume ISMP, pp. 419-431.
- Liu, D. et al., 2020. Comparison of spatial interpolation methods for the estimation of precipitation patterns at different time scales to improve the accuracy of discharge simulations. *Hydrology Research*, 51(4), pp. 583-601.
- Liu, Y. & Yang, T., 2017. Impact of Local Grid Refinements of Spherical Centroidal Voronoi Tessellations for Global Atmospheric Models. *Communications in Computational Physics*, 21(5), pp. 1310-1324.
- Maglo, A., Lavoué, G., Dupont, F. & Hudelot, C., 2013. 3D Mesh Compression: Survey, Comparisons, and Emerging Trends. *ACM Computing Surveys*, 9(4).
- Richter, A., Wai Ng, K. T., Karimi, N. & Man Li, R. Y., 2021. An iterative tessellation-based analytical approach to the design and planning of waste management regions. *Computers, Environment and Urban Systems*, Volume 88, p. 101652.
- Santos, L. F. & Peixoto, P. S., 2021. Topography-based local spherical Voronoi grid refinement on classical and moist shallow-water finite-volume models. *Geoscientific Model Development*, 14(11), pp. 6919-6944.
- Shewchuk, J. R., 2002. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*, 22(1-3), pp. 21-74.
- Tarboton, D. G., 1997. A new method for the determination of flow directions and upslope areas in grid digital elevation models. *Water Resources Research*, 33(2), pp. 309-319.
- Todd, L., Chin, M. H. W. & Coppens, M. O., 2024. Two conjectures on 3D Voronoi structures: a toolkit with biomedical case studies. *Molecular Systems Design & Engineering*, Volume 9, pp. 912-919.
- Yang, H., Gunzburger, M. & Ju, L., 2018. Fast spherical centroidal Voronoi mesh generation: A Lloyd-preconditioned LBFGS method in parallel. *Journal of Computational Physics*, Volume 367, pp. 235-252.
- Zichao, W. D. et al., 2020. Centroidal Voronoi Tessellation Based Methods for Optimal Rain Gauge Location Prediction. *Journal of Hydrology*, Volume 584, p. 124651.